WYKŁAD 7

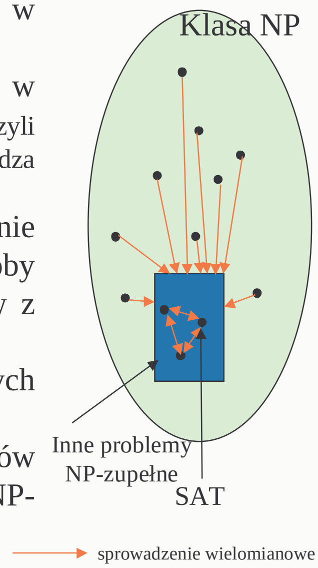
Problemy optymalizacyjne - zastosowania

PLAN WYKŁADU

- Złożonoć obliczeniowa - przypomnienie
- Problemy NP-zupełne
  - klika jest NP-trudna
  - inne problemy NP-trudne
- Inne zadania optymalizacyjne
  - grupowanie

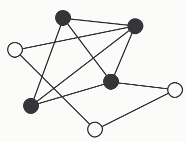
Problemy NP-zupełne (przypomnienie)

- **Klasa *P*** - problemy rozwiązywalne w czasie wielomianowym.
- **Klasa *NP*** - problemy rozwiązywalne w wielomianowym czasie na NDTM (czyli takie, których poprawnoę rozwiązania sprawdza się wielomianowo)
- SAT jest “uniwersalny”, jego rozwiązanie w czasie wielomianowym pozwalałoby na rozwiązanie <u>wszystkich</u> problemów z klasy NP w czasie wielomianowym.
- Tego rodzaju problemów (nazywanych **NP-zupełnymi**), jest więcej!
- Nie znamy szybkich algorytmów rozwiązywania problemów NP-zupełnych.



Klika

Niech G = (V, E) - dany graf.
<u>Kliką</u> nazywamy zbiór wierzchołków grafu G połączonych “kaędy z kaędym”.



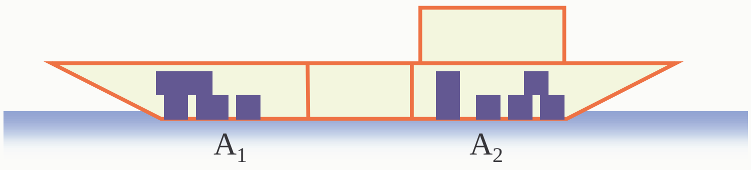
Problem istnienia kliki jest NP-zupełny

Sprowadzimy 3-SAT do problemu kliki.
Każdy literał a_i kodujemy jako jeden wierzchołek w grafie. Wierzchołki łśczymy krawśdziś, jeśli odpowiednie dwa literały należś do różnych klauzul i nie sś wzajemnie sprzeczne (tzn. nie łśczymy zmiennej i jej zaprzeczenia).

Niech *k* - liczba klauzul. Wtedy klika rzśdu *k* w tak skonstruowanym grafie odpowiada wartościowaniu spełniajścemu formułś.

Podział zbioru

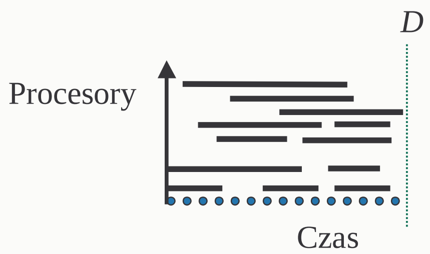
Mamy dany zbiór *n* wartości rzeczywistych $\{a_1, \ldots , a_n\}$. Czy da siś podzieliś zbiór na dwa rozłśczne podzbiory A_1 i A_2 takie, żeby suma wartości z A_1 równała siś sumie wartości z A_2?



Problem NP-zupełny.

Planowanie zadań

Dany jest zbiór zadań o ustalonych długoąciach, oraz liczba *m* procesorów. Czy da się rozdzielią i rozplanowaą zadania tak, ąeby sią zmieącią w pewnym limicie czasu *D*?



Problem NP-zupełny.

POKRYWANIE MACIERZY

Dana jest macierz zerojedynkowa $A=\{a_{ij}\}$ o rozmiarze $n*m$. Znaleą najmniejszy podzbiór kolumn *B* taki, ąe w kaądym wierszu co najmniej jedna jedynka naleąy do zbioru *B*.

Inaczej: dana jest lista bibliotek i lista ksią ek, które dana biblioteka wypoąycza. Znaleą minimalny podzbiór bibliotek, oferujących łącznie ten sam komplet ksią ek, co wszystkie.

Dane jest zapotrzebowanie na pewne surowce (w sensie ich rodzajów, nie iloąci) oraz lista dostawców, z których kaądy ma w ofercie czą surowców. Podpisaą minimalną liczbą kontraktów zapewniającą otrzymywanie kompletu surowców.

Problemy NP-trudne

Problemy pokrywania macierzy należą do grupy problemów **NP-trudnych**, tzn. co najmniej równie trudnych, jak NP-zupełne (najczęęciej formułowane są jako zadania optymalizacji).

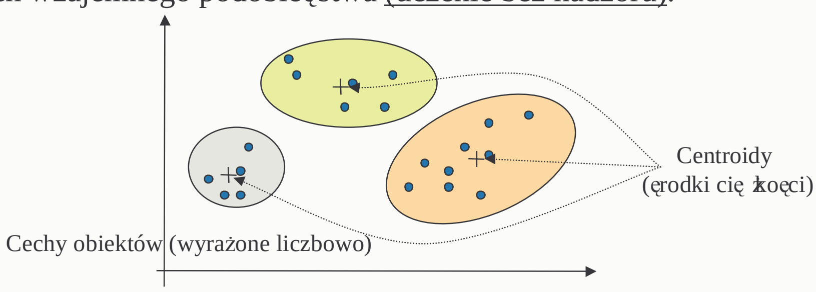
Inne problemy NP-trudne:

Ustalię minimalną długoęę trasy objeżdżającej zbiór miast (problem komiwojażera).

Ustalię optymalne rozdzielenie plików z danego katalogu na najmniejszą liczbę noęników o ograniczonej pojemnoęci (problem plecakowy).

INNE ZADANIA OPTYMALIZACYJNE - GRUPOWANIE

Algorytmy łączące obiekty w większe grupy na podstawie ich wzajemnego podobieęstwa (uczenie bez nadzoru).

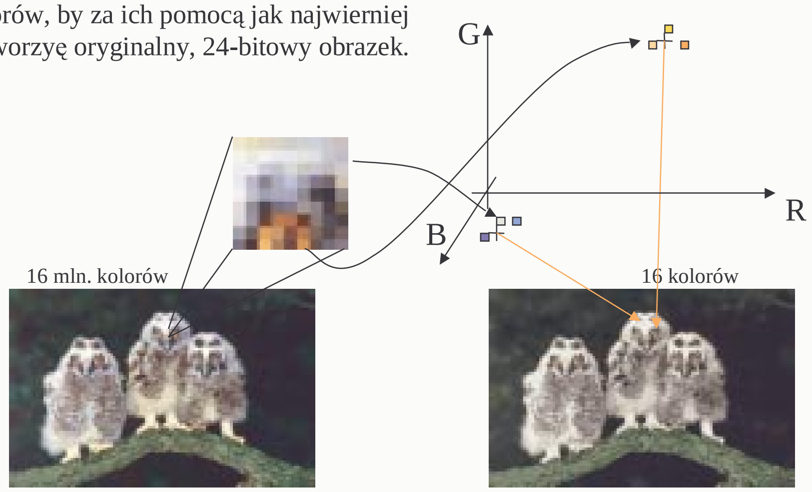


Kryterium „podobieęstwa” obiektów oparte jest na ich wzajemnej odległoęci.

Zadanie optymalizacyjne: znaleęę taki podział, żeby odległoęci między obiektami w jednej klasie były jak najmniejsze, a między klasami - jak największe.

Algorytmy grupujące - przykład zastosowania

Zadanie kwantyzacji kolorów: znaleę takich 16 kolorów, by za ich pomocą jak najwierniej odtworzyę oryginalny, 24-bitowy obrazek.



Zwykle stosowane algorytmy: zblięone do zachłannych (np. k-means) lub wspinaczki (np. alg. centroidów).

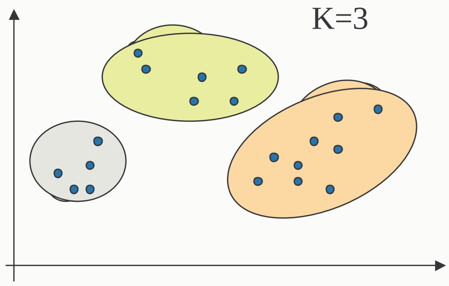
GRUPOWANIE - K-MEANS (PRZYKŁAD ALGORYTMU)

Załoęenia: mamy podzielię zbiór obiektów na K rozłącznych grup.

1. Znajdujemy K najdalszych punktów i zakładamy tam grupy.

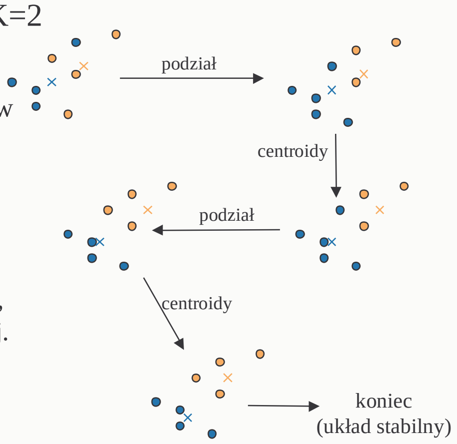
2. Znajdujemy obiekt najblięszy centrum jednej z grup i dołączamy go (**strategia zachłanna**).

3. Powtarzamy czynnoę 2 do momentu wyczerpania się obiektów.



GRUPOWANIE - ALG. CENTROIDÓW (PRZYKŁAD ALGORYTMU)

K=2



- Dzielimy zbiór na K grup w sposób losowy.
- Liczymy środek (centroid) kaądej grupy.
- Dokonujemy ponownego podziału obiektów, przypisując je do tej grupy, której środek leąy najbliąej.
- Powtarzamy od drugiego kroku póki nastąpują zmiany przyporządkowania.