

WSTĘP DO KRYPTOGRAFII

ĆWICZENIA III

(podstawy rachunku prawdopodobieństwa)

Zagadnienia:

- prawdopodobieństwo warunkowe,
- zdarzenia niezależne,
- prawdopodobieństwo zupełne, wzór Bayesa,
- rozkład Bernoulliego, schemat Bernoulliego,
- rozkład Poissona.

Przypomnienie: prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B , oznaczone symbolem $\mathcal{P}(A|B)$, jest to prawdopodobieństwo zdarzenia A obliczane przy założeniu, że zdarzenie B nastąpiło z niezerowym prawdopodobieństwem (tj. $\mathcal{P}(B) > 0$) i wynosi ono

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}.$$

Zadanie 1:

W pewnym przedsiębiorstwie 96% wyprodukowanych wyrobów jest dobrych. Wśród 100 dobrych wyrobów 75 sztuk jest pierwszego gatunku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wyrób jest pierwszego gatunku?

Rozwiązanie: oznaczmy przez A zdarzenie wylosowania dobrego wyrobu a przez B zdarzenie wybrania wyrobu pierwszego gatunku. Z treści zadania wynika, że

$$\mathcal{P}(A) = 0,96$$

oraz

$$\mathcal{P}(B|A) = 0,75.$$

Zdarzenie wylosowania wyrobu pierwszego gatunku to koniunkcja zdarzeń:

- wylosowania wyrobu dobrego,
- wylosowania wyrobu pierwszego gatunku pod warunkiem, że wyrób ten jest dobry.

Zatem:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A \wedge B|A) &= \mathcal{P}(A \cap B|A) \\ &= \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B|A) \\ &= 0,72.\end{aligned}$$



Zadanie 2:

Na loterii jest 100 losów, z których 5 wygrywa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród trzech kupionych losów przynajmniej jeden wygrywa?

Rozwiązanie: oznaczmy przez A_i zdarzenie, że i -ty los wygrywa (dla $i \in \{1, 2, 3\}$), a przez B zdarzenie polegające na tym, że żaden z trzech kupionych losów nie wygrywa. Zatem

$$\begin{aligned} B &= \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{A}_3 \\ &= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \\ &= \bar{A}_3 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1, \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(\bar{A}_3 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) \\ &= \mathcal{P}(\bar{A}_3 \cap (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1)) \\ &= \mathcal{P}(\bar{A}_3 | \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) \cdot \mathcal{P}(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) \\ &= \mathcal{P}(\bar{A}_3 | \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) \cdot \mathcal{P}(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \cdot \mathcal{P}(\bar{A}_1) \\ &= \frac{93}{98} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{95}{100} \\ &\approx 0,85. \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden z trzech kupionych losów
wygrywa wynosi $w \approx 1 - \mathcal{P}(B) = 0,15$.



Przypomnienie: zdarzenie A jest niezależne od występującego z niezerowym prawdopodobieństwem zdarzenia B (tj. $\mathcal{P}(B) > 0$) wttw. gdy zachodzi równość

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A).$$

Wnioski:

- $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B),$
- $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B).$

Zadanie 3:

Prawdopodobieństwo przepalenia żarówki wynosi 0,07. Zakładamy, że żarówki przepalają się w sposób niezależny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia S polegającego na zaświeceniu się co najmniej jednej żarówki, jeżeli:

- połączymy trzy żarówki szeregowo,
- połączymy trzy żarówki równolegle.

Rozwiązanie: oznaczmy przez:

- A - zdarzenie przepalenia się pierwszej żarówki,
- B - zdarzenie przepalenia się drugiej żarówki,
- C - zdarzenie przepalenia się trzeciej żarówki.

Wtedy przy połączeniu szeregowym, co najmniej jedna żarówka zaświeci się, jeżeli tylko wszystkie żarówki zaświecą się. Zdarzenia A, B, C są niezależne, zatem:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S_s) &= \mathcal{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= \mathcal{P}(\overline{A} \cap (\overline{B} \cap \overline{C}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{P}(\overline{A}) \cdot \mathcal{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) \\
&= \mathcal{P}(\overline{A}) \cdot \mathcal{P}(\overline{B}) \cdot \mathcal{P}(\overline{C}) \\
&= 0,93^3 \approx 0,80.
\end{aligned}$$

W przypadku połączenia równoległego zdarzenie S nastąpi gdy zaświeci żarówka pierwsza lub druga lub trzecia, czyli interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(S_r) &= \mathcal{P}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = \mathcal{P}(\overline{A} \cup (\overline{B} \cup \overline{C})) \\
&= \mathcal{P}(\overline{A}) + \mathcal{P}(\overline{B} \cup \overline{C}) - \mathcal{P}(\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \\
&= \mathcal{P}(\overline{A}) + \mathcal{P}(\overline{B}) + \mathcal{P}(\overline{C}) - \mathcal{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) - \mathcal{P}(\overline{A}) \cdot \mathcal{P}(\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= \mathcal{P}(\overline{A}) + \mathcal{P}(\overline{B}) + \mathcal{P}(\overline{C}) - \mathcal{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) - \\
&\quad \mathcal{P}(\overline{A}) \cdot (\mathcal{P}(\overline{B}) + \mathcal{P}(\overline{C}) - \mathcal{P}(\overline{B} \cap \overline{C})) \\
&= 3 \cdot 0,93 - 0,93^2 - 0,93 \cdot (2 \cdot 0,93 - 0,93^2) \approx 1,00.
\end{aligned}$$



Zadanie 4:

Korzystając z faktu, że jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_{n+1} są niezależne to zdarzenia $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, A_{n+1}$ są niezależne udowodnij, że niezależność zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_{n+1} implikuje niezależność zdarzeń $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_{n+1}$.

Rozwiązanie: dowód przeprowadzamy przez indukcję względem n .

- baza indukcji:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) &= \mathcal{P}(\overline{A_1 \cup A_2}) \\ &= 1 - \mathcal{P}(A_1 \cup A_2) \\ &= 1 - \mathcal{P}(A_1) - \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_1) \cdot \mathcal{P}(A_2) \\ &= \mathcal{P}(\overline{A}_1) - \mathcal{P}(A_2) \cdot (1 - \mathcal{P}(A_1)) \\ &= \mathcal{P}(\overline{A}_1) - \mathcal{P}(A_2) \cdot \mathcal{P}(\overline{A}_1) \\ &= \mathcal{P}(\overline{A}_1) \cdot (1 - \mathcal{P}(A_2)) \\ &= \mathcal{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathcal{P}(\overline{A}_2).\end{aligned}$$

- założenie indukcyjne: z niezależności zdarzeń A_1, A_2, \dots, A_n wynika niezależność zdarzeń $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$.

krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_n \cap \overline{A}_{n+1}) \\ = & \mathcal{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}}) \\ = & 1 - \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) \\ = & 1 - \mathcal{P}(A_{n+1}) - \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_n) + \\ & \mathcal{P}(A_{n+1}) \cdot \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_n) \\ = & \mathcal{P}(\overline{A}_{n+1}) - \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_n) \cdot (1 - \mathcal{P}(A_{n+1})) \\ = & \mathcal{P}(\overline{A}_{n+1}) - \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_n) \cdot \mathcal{P}(\overline{A}_{n+1}) \\ = & \mathcal{P}(\overline{A}_{n+1}) \cdot (1 - \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_n)) \\ = & \mathcal{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathcal{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_n}) \\ = & \mathcal{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathcal{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_n \cap \overline{A}_n) \\ = & \mathcal{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathcal{P}(\overline{A}_2) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}(\overline{A}_n) \cdot \mathcal{P}(\overline{A}_{n+1}) \cdot \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem, że jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_{n+1} są niezależne to zdarzenia $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_{n+1}$ także są niezależne.



Przypomnienie: jeżeli zdarzenia A_i tworzą układ zupełny zdarzeń Ω oraz $\forall i : \mathcal{P}(A_i) > 0$ wtedy dla dowolnego zdarzenia B zachodzi równość

$$\mathcal{P}(B) = \sum_i \mathcal{P}(A_i) \cdot \mathcal{P}(B|A_i).$$

Jeżeli dodatkowo $\mathcal{P}(B) > 0$ to dla dowolnego A_j prawdziwa jest zależność (tzw. wzór Bayesa)

$$\mathcal{P}(A_j|B) = \frac{\mathcal{P}(A_j) \cdot \mathcal{P}(B|A_j)}{\mathcal{P}(B)}.$$

Zadanie 5:

W magazynie fabryki znajdują się kalkulatory pochodzące z czterech różnych taśm produkcyjnych, przy czym liczby kalkulatorów z każdej taśmy są parami równe. Wiadomo, że dostawy z taśmy pierwszej zawierają 1,2% egzemplarzy wadliwych, z taśmy drugiej, trzeciej i czwartej odpowiednio 0,8%, 2,6% oraz 0,4% egzemplarzy wadliwych. Wybieramy losowo kalkulator, który okazuje się być wadliwym egzemplarzem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi on z trzeciej taśmy produkcyjnej?

Rozwiązanie: oznaczmy przez A_i dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ zdarzenie polegające na tym, że wybrany w sposób losowy kalkulator pochodzi z i -tej taśmy produkcyjnej, natomiast przez B zdarzenie wylosowania wadliwego kalkulatora. Z treści zadania wiem, że:

$$\mathcal{P}(A_1) = \mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(A_3) = \mathcal{P}(A_4) = 0,25,$$

oraz

$$\mathcal{P}(B|A_1) = 0,012,$$

$$\mathcal{P}(B|A_2) = 0,008,$$

$$\mathcal{P}(B|A_3) = 0,026,$$

$$\mathcal{P}(B|A_4) = 0,004.$$

Stąd

$$\mathcal{P}(B) = \sum_{i=1}^4 \mathcal{P}(A_i) \mathcal{P}(B|A_i)$$

$$\begin{aligned} &= 0,25 \cdot (0,012 + 0,008 + 0,026 + 0,004) \\ &= 0,0125. \end{aligned}$$

Korzystając z wzoru Bayesa wyznaczamy prawdopodobieństwo wylosowania kalkulatora pochodzącego z trzeciej taśmy (zdarzenie A_3) pod warunkiem, że jest on egzemplarzem wadliwym:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_3|B) &= \frac{\mathcal{P}(A_3) \cdot \mathcal{P}(B|A_3)}{\mathcal{P}(B)} \\ &= \frac{0,25 \cdot 0,026}{0,0125} = 0,52. \end{aligned}$$



Zadanie 6:

Wiadomo, że 90% elementów pewnej produkcji masowej spełnia żądane wymagania techniczne. Przeprowadzono dodatkową kontrolę, przy której mogły być popełnione pewne błędy, a mianowicie: element wadliwy mógł być uznany zostać sklasyfikowany jako dobry z prawdopodobieństwem 0,05, a element dobry mógł zostać sklasyfikowany jako wadliwy z prawdopodobieństwem 0,02. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany element po dodatkowej kontroli jest:

- dobry, jeżeli kontrola wykazała, że jest dobry,
- wadliwy, jeżeli kontrola wykazała, że jest dobry.

Rozwiązanie: oznaczmy przez A_1 zdarzenie polegające na tym, że wylosowany element jest dobry, a przez A_2 zdarzenie polegające na tym, że wylosowany element jest wadliwy. Z treści zadania wiem, że:

$$\mathcal{P}(A_1) = 0,9 \quad \wedge \quad \mathcal{P}(A_2) = 0,1.$$

Dalej B określa zdarzenie, że dodatkowa kontrola uzna dany element za dobry, zatem:

$$\mathcal{P}(B|A_1) = 0,98 \quad \wedge \quad \mathcal{P}(B|A_2) = 0,05$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \sum_{i=1}^2 \mathcal{P}(A_i) \mathcal{P}(B|A_i) \\ &= 0,90 \cdot 0,98 + 0,10 \cdot 0,05 \\ &= 0,887. \end{aligned}$$

Na tej podstawie losowo wybrany element uznany przez dodatkową

kontrolę za dobry jest faktycznie elementem dobrym z prawdopodobieństwem

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A_1 | B) &= \frac{\mathcal{P}(A_1) \cdot \mathcal{P}(B | A_1)}{\mathcal{P}(B)} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0,98}{0,887} \approx 0,99.\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany element uznany przez dodatkową kontrolę za dobry jest faktycznie elementem złym wynosi $\approx 1 - \mathcal{P}(A_1 | B) = 0.01$.



Przypomnienie: wykonujemy doświadczenie (schemat Bernoulliego), którego rezultatem może być zdarzenie A (sukces) z prawdopodobieństwem $\mathcal{P}(A) = p$ i zdarzenie \bar{A} (porażka) z prawdopodobieństwem $\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - p = q$. Niech dalej X będzie zmienną losową określającą liczbę sukcesów jakie otrzymamy po zakończeniu n doświadczeń w niezmiennych warunkach, wtedy

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

dla $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Zadanie 7:

Każde z pytań egzaminacyjnych jest napisane na oddzielnej kartce. Student losuje jedno pytanie, po czym zwraca kartkę. Egzaminator egzaminuje czterech studentów. Każdy ze zdających zna odpowiedź na dokładnie 30% pytań egzaminacyjnych. Niech X oznacza liczbę studentów, którzy umieli odpowiedzieć na wylosowane pytanie. Określ rozkład zmiennej losowej X a także prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwóch studentów odpowiedziało na wylosowane pytanie.

Rozwiązanie: z treści zadania wynika, że mamy do czynienia z schematem Bernoulliego, w którym liczba prób doświadczenia to liczba zdających studentów (tj. $n = 4$) a prawdopodobieństwo sukcesu wynosi dokładnie 0,3 (tj. $p = 0,3$). Zatem:

$$\mathcal{P}(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^4 \approx 0,24,$$

$$\mathcal{P}(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^3 \approx 0,41,$$

$$\mathcal{P}(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 \approx 0,26,$$

$$\mathcal{P}(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^1 \approx 0,08,$$

$$\mathcal{P}(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^0 \approx 0,01.$$

Prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwóch studentów odpo-

wiedziało na zadane im pytanie wynosi:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X \geq 2) &= \sum_{i=2}^4 \mathcal{P}(X = i) \\ &\approx 0,26 + 0,08 + 0,01 \\ &= 0,35.\end{aligned}$$



Zadanie 8:

Energia pochodząca z określonego źródła ma być z przerwami używana przez pięciu robotników. Robotnicy korzystają z energii w następujący sposób:

- w danej chwili czasu prawdopodobieństwo zapotrzebowania na energię jest równe u wszystkich robotników i wynosi p ,
- robotnicy pracują niezależnie od siebie,
- każdy z robotników korzysta z energii przez 12 minut w ciągu godziny pracy.

Niech X oznacza liczbę robotników korzystających z energii w danej chwili. Określ rozkład zmiennej losowej X a także prawdopodobieństwo tego, że liczba robotników korzystających z energii w danej chwili jest nie większa od 2.

Rozwiązanie: z treści zadania wynika, że mamy do czynienia z schematem Bernoulliego, w którym liczba prób doświadczenia to liczba robotników (tj. $n = 5$) a prawdopodobieństwo sukcesu wynosi dokładnie 0,2 (tj. $p = \frac{12}{60} = 0,2$). Zatem:

$$\mathcal{P}(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 \approx 0,33,$$

$$\mathcal{P}(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 \approx 0,41,$$

$$\mathcal{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 \approx 0,20,$$

$$\mathcal{P}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 \approx 0,05,$$

$$\mathcal{P}(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 \approx 0,01.$$

$$\mathcal{P}(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 \approx 0,00.$$

Prawdopodobieństwo tego, że co najwyżej dwóch robotników korzysta z energii w danej chwili wynosi:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X \leq 2) &= \sum_{i=0}^2 \mathcal{P}(X = i) \\ &\approx 0,33 + 0,41 + 0,20 \\ &= 0,94.\end{aligned}$$



Przypomnienie: zmienna losowa X przyjmująca wartość $k = \{0, 1, 2, \dots\}$ ma rozkład Poissona o parametrze λ , jeżeli jej funkcja prawdopodobieństwa opisana jest wzorem

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

dla $\lambda > 0$. Zatem $EX = \lambda = D^2X$. Rozkład Poissona aproksymuje rozkład Bernoulliego, jeżeli $n \rightarrow \infty$ oraz $p \rightarrow 0$, wtedy przyjmujemy, że $\lambda = n \cdot p$.

Zadanie 9:

Stwierdzono, że w pierwszym składzie książki popełniono przeciętnie 3,7 błędu na jednej stronie i, że rozkład liczby błędów ma charakter rozkładu Poissona. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrana losowo książka z pierwszego składania ma dokładnie 6 błędów na jednej stronie.

Rozwiązanie: niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę błędów na jednej stronie książki. Wiemy, że X ma rozkład Poissona oraz $EX = 3,7$, zatem $\lambda = 3,7$. Na tej podstawie:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = 6) &= \frac{3,7^6}{6!} \cdot e^{-3,7} \\ &\approx 3,564 \cdot e^{-3,7} \\ &= 0,088.\end{aligned}$$



Zadanie 10:

W skład złożonej aparatury wchodzi m.in. 1000 elementów określonego rodzaju. Prawdopodobieństwo uszkodzenia każdego z elementów w ciągu jednego roku pracy aparatury wynosi 0,001 i nie zależy od uszkodzeń pozostałych elementów. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo uszkodzenia w ciągu roku:

- dokładnie dwóch elementów,
- nie mniej niż dwóch elementów.

Rozwiązanie: proces psucia się elementów aparatury ma charakter schematu Bernoulliego dla liczby prób $n = 1000$ oraz prawdopodobieństwa sukcesu (uszkodzenia elementu) $p = 0,001$. Ponieważ $n \rightarrow \infty$ oraz $p \rightarrow 0$ to możemy przybliżyć wartość rozkładu Bernoulliego X (liczby zepsutych elementów) przez wartość rozkładu Poissona. Zatem:

$$\mathcal{P}(X = 2) \approx \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X \geq 2) &\approx 1 - (\mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} \right),\end{aligned}$$

gdzie $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0,001 = 1$. Czyli:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = 2) &\approx \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} \\ &= 0,184\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X \geq 2) &\approx 1 - \left(\frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} \right) \\ &= 1 - (0,736) \\ &= 0,264.\end{aligned}$$

