

# *WSTĘP DO KRYPTOGRAFII*

## **ĆWICZENIA II** (kombinatoryka)

## **Zagadnienia:**

- prostokąty łacińskie,
- rekurencja i funkcje tworzące,
- permutacje, kombinacje.

## Prostokąty łacińskie - przypomnienie:

- prostokątem łacińskim wymiaru  $p \times q$  ( $p$  - liczba wierszy,  $q$  - liczba kolumn) nazywamy macierz  $\mathcal{L}$  spełniającą zależności:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \forall j, k \in \{1, 2, \dots, q\} : j \neq k \Rightarrow \mathcal{L}[i, j] \neq \mathcal{L}[i, k],$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, q\} \forall j, k \in \{1, 2, \dots, p\} : j \neq k \Rightarrow \mathcal{L}[j, i] \neq \mathcal{L}[k, i],$$

$$\text{np.: } \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- twierdzenie 1: każdy prostokąt łaciński  $\mathcal{L}$  wymiaru  $p \times n$  o elementach ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego  $\mathcal{L}'$  o wymiarach  $n \times n$ ,
- twierdzenie 2: każdy prostokąt łaciński  $\mathcal{L}$  wymiaru  $p \times q$  o elementach ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego  $\mathcal{L}'$  o wymiarach  $n \times n$  wttw. gdy

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathcal{L} \langle i \rangle \geq p + q - n,$$

gdzie  $\mathcal{L} \langle i \rangle$  oznacza liczbę wystąpień elementu  $i$  w prostokącie łacińskim  $\mathcal{L}$ .

### Zadanie 1:

- niech  $\alpha$  będzie liczbą wszystkich możliwych kwadratów łacińskich rozmiaru  $n \times n$  o elementach ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Pokaż, że

$$1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n! \leq \alpha < (n^2)!,$$

Rozwiązanie: rozważmy ograniczenia oddzielnie, czyli

- $1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n! \leq \alpha$  - pytamy więc na ile sposobów (oznaczenie  $\|\cdot\|$ ) w przypadku pesymistycznym (tj. zakładamy najbardziej rygorystyczną zależność elementów w wierszach i kolumnach) można wybierać poszczególne elementy budując kwadrat łaciński  $\mathcal{L}$ . Odpowiedź:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \|n\| & \|n-1\| & \|n-2\| & \dots & \|3\| & \|2\| & \|1\| \\ \|n-1\| & \|n-2\| & \|n-3\| & \dots & \|2\| & \|1\| & ? \\ \|n-2\| & \|n-3\| & \|n-4\| & \dots & \|1\| & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \|3\| & \|2\| & \|1\| & \dots & ? & ? & ? \\ \|2\| & \|1\| & ? & \dots & ? & ? & ? \\ \|1\| & ? & ? & \dots & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Jak można uzupełnić macierz  $\mathcal{L}$  poniżej jej diagonalnej tak, aby w rezultacie otrzymać kwadrat łaciński?

Oczywiście warunkiem wystarczającym i koniecznym do poprawnego uzupełnienia macierzy  $\mathcal{L}$  jest potraktowanie jej diagonalnej jako oś symetrii odbicia lustrzanego elementów, czyli np.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie kwadrat łaciński  $\mathcal{L}$  można zbudować w przypadku pesymistycznym na dokładnie  $n! \cdot (n-1)! \cdot \dots \cdot 1!$  sposobów, zatem  $1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n! \leq \alpha$ .

- $\alpha < (n^2)!$  - zauważmy, że każdy kwadrat łaciński rozmiaru  $n \times n$  można traktować jako ciąg  $n^2$  elementów (np. czytając macierz  $\mathcal{L}$  wierszami od lewej do prawej). Oczywiście liczba permutacji takiego ciągu to dokładnie  $(n^2)!$ . Wśród tych permutacji znajdują się jednak układy nie odpowiadające kwadratowi łacińskiemu np.:

$$\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{22 \dots 2}_n \dots \underbrace{nn \dots n}_n,$$

czyli  $\alpha < (n^2)!$ .



## Zadanie 2:

Dla jakich możliwych wartości  $x, y$  następujące kwadraty łacińskie o elementach ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  mogą być rozszerzone do kwadratów łacińskich  $\mathcal{L}^*$  wymiaru  $6 \times 6$ . W każdym z możliwych przypadków przedstawić jedno z takich rozszerzeń.

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & x \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & y \end{bmatrix}.$$

### Rozwiązanie:

- macierz  $\mathcal{L}_1$  - zgodnie z twierdzeniem 2,  $\mathcal{L}_1$  można rozszerzyć do wymiaru  $6 \times 6$  wttw. kiedy  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : \mathcal{L}_1 \langle i \rangle \geq 4 + 4 - 6$ , sprawdzamy więc dla jakiej wartości  $x$  warunek ten jest prawdziwy:

$$i = 1 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \langle 1 \rangle = 4 \geq 2 \text{ czyli } x \neq 1,$$

$$i = 2 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \langle 2 \rangle = 3 \geq 2 \text{ czyli } x \neq 2,$$

$$i = 3 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \langle 3 \rangle = 2 \geq 2 \text{ czyli } x \neq 3,$$

$$i = 4 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \langle 4 \rangle = 3 \geq 2 \text{ czyli } x \neq 4,$$

$$i = 5 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \langle 5 \rangle = 2 \geq 2 \text{ czyli } x \neq 5,$$

$$i = 6 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \langle 6 \rangle = 1 < 2 \text{ czyli } x = 6.$$

Zatem dla  $x = 6$  kwadrat łąciński  $\mathcal{L}_1$  może być rozbudowany do

kwadratu łacińskiego  $\mathcal{L}_1^*$  wymiaru  $6 \times 6$ , np.:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\
 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \{\underline{5}, 6\} \\ 5 & 6 & 1 & 2 & \{\underline{4}, 3\} \\ 3 & 4 & 5 & 1 & \{\underline{6}, 2\} \\ 4 & 1 & 2 & 6 & \{\underline{3}, 5\} \end{bmatrix} \\
 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \{\underline{6}\} \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & \{\underline{3}\} \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & \{\underline{2}\} \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & \{\underline{5}\} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ \{\underline{2}, 6\} & \{\underline{3}, 5\} & \{\underline{6}, 4\} & \{\underline{5}, 3\} & \{\underline{1}, 2\} & \{\underline{4}, 1\} \end{bmatrix}$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 4 \\ \{\underline{6}\} & \{\underline{5}\} & \{\underline{4}\} & \{\underline{3}\} & \{\underline{2}\} & \{\underline{1}\} \end{bmatrix}$$

$$\text{Ostatecznie } \mathcal{L}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- o macierz  $\mathcal{L}_2$  - zgodnie z twierdzeniem 2,  $\mathcal{L}_2$  można rozszerzyć do wymiaru  $6 \times 6$  wttw. kiedy  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : \mathcal{L}_2 \langle i \rangle \geq 4 + 4 - 6$ , sprawdzamy więc dla jakiej wartości  $y$  warunek ten jest prawdziwy:

$$i = 1 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \langle 1 \rangle = 4 \geq 2 \text{ czyli } y \neq 1,$$

$$i = 2 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \langle 2 \rangle = 3 \geq 2 \text{ czyli } y \neq 2,$$

$$i = 3 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \langle 3 \rangle = 2 \geq 2 \text{ czyli } y \neq 3,$$

$$i = 4 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \langle 4 \rangle = 3 \geq 2 \text{ czyli } y \neq 4,$$

$$i = 5 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \langle 5 \rangle = 2 \geq 2 \text{ czyli } y \neq 5,$$

$$i = 6 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \langle 6 \rangle = 1 < 2 \text{ czyli } y = 6.$$

Jednak dla  $y = 6$  macierz  $\mathcal{L}_2$  nie reprezentuje poprawnego kwadratu łacińskiego

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Zatem każde rozszerzenie tego kwadratu także nie będzie poprawnym kwadratem łacińskim. Jeżeli  $y \neq 6$  to  $\mathcal{L}_2 \langle 6 \rangle = 1 < 2$ , czyli zgodnie z twierdzeniem 2, kwadrat  $\mathcal{L}_2$  nie może być rozszerzony do wymiaru  $6 \times 6$ .



### Zadanie 3:

Niech  $\mathcal{L}$  będzie prostokątem łacińskim rozmiaru  $p \times q$  o elementach ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , przy czym

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathcal{L} \langle i \rangle = k.$$

Pokaż, że  $\mathcal{L}$  może być rozszerzony do kwadratu łacińskiego  $\mathcal{L}^*$  o wymiarach  $n \times n$ .

### Rozwiązanie:

- stwierdzamy, że  $n \geq p \geq 0$ ,  $n \geq q \geq 0$  oraz  $n \geq \max\{p, q\}$ ,
  - wiemy, że  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathcal{L}\langle i \rangle = k$ , zatem  $p \cdot q = k \cdot n$ , a z tego

$$k = \frac{p \cdot q}{n},$$

- zgodnie z twierdzeniem 2,  $\mathcal{L}$  można rozszerzyć do wymiaru  $n \times n$  wttw. kiedy  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathcal{L}\langle i \rangle = k \geq p + q - n$ , zatem należy rozwiązać zależność

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot q}{n} &\geq p + q - n \\ p \cdot q &\geq n \cdot (p + q) - n^2 \\ n^2 - n \cdot (p + q) + p \cdot q &\geq 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z klasyczną metodą rozwiązywania równań 2-ego stopnia dostajemy:

\*

$$\begin{aligned}\Delta &= (- (p + q))^2 - 4 \cdot p \cdot q \\ &= p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 - 4 \cdot p \cdot q \\ &= p^2 - 2 \cdot p \cdot q + q^2 \\ &= (p - q)^2,\end{aligned}$$

\*

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{-(- (p + q)) - \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \frac{p + q - p + q}{2} \\ &= q,\end{aligned}$$

\*

$$\begin{aligned}n_2 &= \frac{-(- (p + q)) + \sqrt{\Delta}}{2} \\&= \frac{p + q + p - q}{2} \\&= p.\end{aligned}$$

Rozwiązaniem równania są punkty  $n_1 = q$  oraz  $n_2 = p$ . Ekstremum funkcji  $f(n) = n^2 - n \cdot (p + q) + p \cdot q$  znajduje się w punkcie  $\frac{p+q}{2}$ , wtedy

$$\begin{aligned}f\left(\frac{p+q}{2}\right) &= \frac{4 \cdot p \cdot q - (- (p + q))^2}{4} \\&= \frac{-p^2 + 2pq - q^2}{4} \\&= \frac{-(p - q)^2}{4}.\end{aligned}$$

Dla dowolnych  $p, q \in \mathbb{N}$  zachodzi  $f\left(\frac{p+q}{2}\right) \leq 0$ , z czego wynika,

że

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \max \{p, q\} \Rightarrow n^2 - n \cdot (p + q) + p \cdot q \geq 0,$$

zatem warunek

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathcal{L} \langle i \rangle = k \geq p + q - n$$

jest spełniony i macierz  $\mathcal{L}$  rozmiaru  $p \times q$  może być rozszerzona do kwadratu łacińskiego  $\mathcal{L}^*$  o wymiarach  $n \times n$  .



## Rekurencja i funkcje tworzące - przypomnienie:

- niech  $f_n$  będzie  $n$ -tą liczbą Fibonacciego zdefiniowaną przez poniższe równanie rekurencyjne:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Pytamy jaka jest postać zwarta (nierekurencyjna zależność algebraiczna)  $n$ -tej liczby Fibonacciego, gdzie  $n \geq 2$ ? Bezpośredniej odpowiedzi udzielić może nam funkcja tworząca ciągu kolejnych liczb Fibonacciego  $F = f_0, f_1, f_2, \dots$ ,

- jak szukamy funkcji tworzącej:
  - określamy ogólne równanie rekurencyjne liczby  $f_n$  wiążące wszystkie wartości naturalne zmiennej indeksującej  $n$ , czyli

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1],$$

- o mnożymy obie strony równania przez  $z^n$  ( $z$  - współczynnik pomocniczy) i sumujemy po wszystkich  $n$ , czyli

$$\begin{aligned} f_n \cdot z^n &= f_{n-1} \cdot z^n + f_{n-2} \cdot z^n + [n = 1] \cdot z^n \\ \sum_n f_n \cdot z^n &= \sum_n f_{n-1} \cdot z^n + \sum_n f_{n-2} \cdot z^n + \sum_n [n = 1] \cdot z^n \\ \sum_n f_n \cdot z^n &= \sum_n f_n \cdot z^{n+1} + \sum_n f_n \cdot z^{n+2} + z. \end{aligned}$$

Dla  $\sum_n f_n \cdot z^n$  wprowadzamy oznaczenie  $F(z)$  i przepisujemy równanie rekurencyjne używając nowego symbolu,

$$F(z) = F(z) \cdot z + F(z) \cdot z^2 + z$$

- o rozwiązujemy równanie (szukamy zwartej postaci) względem  $F(z)$ , czyli

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2},$$

- o niech  $\rho_1, \rho_2$  będą odwrotnościami rozwiązaniami równania  $1 - z - z^2 = 0$ ,  $P(z) = z$  oraz  $Q(z) = 1 - z - z^2$ . Jeżeli  $\rho_1 \neq \rho_2$  i stopień wielomianu  $P(z)$  jest mniejszy od stopnia wielomianu  $Q(z)$  to postać zwarta dla  $n$ -tej liczby Fibonacciego wyraża się równaniem

$$f_n = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot \rho_i^n, \text{ gdzie } a_i = \frac{-\rho_i \cdot P\left(\frac{1}{\rho_i}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_i}\right)}.$$

Zatem:

$$1 - z - z^2 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \wedge \rho_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

więc

$$\begin{aligned} f_n &= a_1 \cdot \rho_1^n + a_2 \cdot \rho_2^n \\ &= \frac{-\rho_1 \cdot P\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_1}\right)} \cdot \rho_1^n + \frac{-\rho_2 \cdot P\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_2}\right)} \cdot \rho_2^n, \end{aligned}$$

$$= \frac{-\rho_1 \cdot \frac{1}{\rho_1}}{Q' \left( \frac{1}{\rho_1} \right)} \cdot \rho_1^n + \frac{-\rho_2 \cdot \frac{1}{\rho_2}}{Q' \left( \frac{1}{\rho_2} \right)} \cdot \rho_2^n$$

gdzie  $Q'(z) = -1 - 2 \cdot z$ , czyli

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{-\rho_1^n}{-1 - \frac{2}{\rho_1}} + \frac{-\rho_2^n}{-1 - \frac{2}{\rho_2}} \\ &= \frac{\rho_1^n}{1 + \frac{4}{1+\sqrt{5}}} + \frac{\rho_2^n}{1 + \frac{4}{1-\sqrt{5}}} \\ &= \frac{\rho_1^n}{1 + \frac{4 \cdot (1-\sqrt{5})}{-4}} + \frac{\rho_2^n}{1 + \frac{4 \cdot (1+\sqrt{5})}{-4}} \\ &= \frac{\rho_1^n}{\sqrt{5}} + \frac{\rho_2^n}{-\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\rho_1^n - \rho_2^n). \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

co odpowiada znanemu rezultatowi tzw. wzorowi Bineta (faktycznie pierwszy doszedł do niego Leonhard Euler prawie wiek przed Jacques'e'm Binetem).



## Zadanie 4:

- na ile różnych sposobów można ułożyć wieżę wysokości  $n \geq 0$  cm., jeżeli dysponujemy klockami:
  - wysokości 1 cm. - białe ( $B$ ),
  - wysokości 2 cm. - czerwone ( $C$ ), zielone ( $Z$ ) i niebieskie ( $N$ ).

Odpowiedź podaj w formie równania rekurencyjnego oraz zwartej postaci (nierekurencyjnej zależności algebraicznej). Oblicz liczbę wszystkich możliwych wież wysokości  $n = 17$ .

### Rozwiązanie:

- poszukiwanie równania rekurencyjnego - założmy, że wieżę wysokości  $n - 1$  oraz  $n - 2$  można zbudować odpowiednio na  $g_{n-1}$  i  $g_{n-2}$  możliwości. Wtedy wieżę wysokości  $n$  konstruujemy jedynie przez dwa rozłączne posunięcia:
  - na wieżę wysokości  $n - 2$  nakładamy 2 cm. klocek  $x \in \{C, Z, N\}$ ,
  - na wieżę wysokości  $n - 1$  nakładamy 1 cm. klocek  $B$ .

Zatem ogólne równanie rekurencyjne określające liczbę możliwości budowy wieży wysokości  $n$  ma postać

$$g_n = g_{n-1} + 3 \cdot g_{n-2}.$$

Pozostaje nam jeszcze określenie wartości brzegowych (początkowych) dla  $n = 0$  i  $n = 1$ . Ustalamy, że  $g_0 = 1$  ( $g_0 = 0$  nie

gwarantuje poprawności równania rekurencyjnego) i  $g_1 = 1$  (jedyna możliwa wieża wysokości jeden to pojedynczy klocek  $B$ ),

- wyznaczenie postaci zwartej dla  $g_n$  - postępujemy zgodnie z zaprezentowanym powyżej schematem konstrukcji funkcji tworzącej:
  - określamy ogólne równanie rekurencyjne liczby  $g_n$  wiążące wszystkie wartości naturalne zmiennej indeksującej  $n$ , czyli

$$g_n = g_{n-1} + 3 \cdot g_{n-2} + [n = 0],$$

- mnożymy obie strony równania przez  $z^n$  ( $z$  - współczynnik pomocniczy) i sumujemy po wszystkich  $n$ , czyli

$$\begin{aligned} g_n \cdot z^n &= g_{n-1} \cdot z^n + 3 \cdot g_{n-2} \cdot z^n + [n = 0] \cdot z^n \\ \sum_n g_n \cdot z^n &= \sum_n g_{n-1} \cdot z^n + 3 \cdot \sum_n g_{n-2} \cdot z^n + \sum_n [n = 0] \cdot z^n \\ \sum_n g_n \cdot z^n &= \sum_n g_n \cdot z^{n+1} + 3 \cdot \sum_n g_n \cdot z^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

Dla  $\sum_n g_n \cdot z^n$  wprowadzamy oznaczenie  $G(z)$  i przepisujemy równanie rekurencyjne używając nowego symbolu,

$$G(z) = G(z) \cdot z + 3 \cdot G(z) \cdot z^2 + 1,$$

- rozwiązujemy równanie (szukamy zwartej postaci) względem  $G(z)$ , czyli

$$G(z) = \frac{1}{1 - z - 3 \cdot z^2},$$

- niech  $\rho_1, \rho_2$  będą odwrotnościami rozwiązaniami równania  $1 - z - 3 \cdot z^2 = 0$ ,  $P(z) = 1$  oraz  $Q(z) = 1 - z - 3 \cdot z^2$ . Jeżeli  $\rho_1 \neq \rho_2$  i stopień wielomianu  $P(z)$  jest mniejszy od stopnia wielomianu  $Q(z)$  to postać zwarta dla liczby możliwych wież wysokości  $n$  wyraża się równaniem

$$g_n = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot \rho_i^n, \text{ gdzie } a_i = \frac{-\rho_i \cdot P\left(\frac{1}{\rho_i}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_i}\right)}.$$

Zatem:

$$1 - z - 3 \cdot z^2 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \wedge \rho_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2},$$

więc

$$\begin{aligned} g_n &= a_1 \cdot \rho_1^n + a_2 \cdot \rho_2^n \\ &= \frac{-\rho_1 \cdot P\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_2}\right)} \cdot \rho_1^n + \frac{-\rho_2 \cdot P\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_2}\right)} \cdot \rho_2^n, \\ &= \frac{-\rho_1 \cdot 1}{Q'\left(\frac{1}{\rho_1}\right)} \cdot \rho_1^n + \frac{-\rho_2 \cdot 1}{Q'\left(\frac{1}{\rho_2}\right)} \cdot \rho_2^n \end{aligned}$$

gdzie  $Q'(z) = -1 - 6 \cdot z$ , czyli

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{-\rho_1^{n+1}}{-1 - \frac{6}{\rho_1}} + \frac{-\rho_2^{n+2}}{-1 - \frac{6}{\rho_2}} \\ &= \frac{\rho_1^{n+1}}{1 + \frac{12}{1+\sqrt{13}}} + \frac{\rho_2^{n+1}}{1 + \frac{12}{1-\sqrt{13}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho_1^{n+1}}{1 + \frac{12 \cdot (1 - \sqrt{13})}{-12}} + \frac{\rho_2^{n+1}}{1 + \frac{12 \cdot (1 + \sqrt{13})}{-12}} \\
&= \frac{\rho_1^{n+1}}{\sqrt{13}} + \frac{\rho_2^{n+1}}{-\sqrt{13}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (\rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^{n+1} \right),
\end{aligned}$$

- dla  $n = 17$  istnieje dokładnie

$$g_{17} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^{18} - \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^{18} \right) = 399331 \approx 10^5$$

różnych wież zbudowanych z klocków białych, czerwonych, zielonych oraz niebieskich.

## Zadanie 5:

- niech  $\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$  będzie odnawialnym (niewyczerpywalnym) zbiorem  $r \geq 3$  kul koloru  $k_i$ . Wybieramy ze zbioru  $\mathcal{K}$   $n$  dowolnych kul i umieszczamy je w pudełku  $\mathcal{P}_n$  pojemności  $n$ . Na ile różnych sposobów można skompletować pudełko  $\mathcal{P}_n$ , gdzie  $n \geq 0$  (kolejność kul w pudełkach nie jest istotna). Odpowiedź podaj w formie równania rekurencyjnego oraz zwartej postaci (nierekurencyjnej zależności algebraicznej). Oblicz liczbę wszystkich możliwych ustawień kul w pudełku  $\mathcal{P}_n$  dla  $n = 17$  i  $r = 7$ .

### Rozwiązanie:

- poszukiwanie równania rekurencyjnego - założmy, że pudełko  $\mathcal{P}_{n-1}$  pojemności  $n-1$  można skompletować na  $h_{n-1,r}$  sposobów. Wtedy pudełko  $\mathcal{P}_n$  pojemności  $n$  możemy skompletować przesypując do niego zawartość pudełka  $\mathcal{P}_{n-1}$  i dokładając jedną z  $r$  kul. Wstępnie możemy napisać

$$h_{n,r} = r \cdot h_{n-1,r}.$$

Oczywiście to równanie rekurencyjne zlicza prawie wszystkie ustawienia kul w pudełku  $\mathcal{P}_n$  dwukrotnie. Dlaczego ( $k_{i_j}$  oznacza  $j$ -tą kulę koloru  $i$ -tego dla  $1 \leq i \leq r$ ):

- niech  $\{k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_n}\}$  będzie ustawieniem jednokolorowym, tj.

$$\forall p, q \in \{1, 2, \dots, n\} : k_{i_p} = k_{i_q},$$

wtedy ustawienie to mogło być zbudowane z jednego ustawienia  $n - 1$  elementowego  $\{k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_{n-1}}\}$  przez dodanie kuli  $k_{i_n}$ ,

- o niech  $\{k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_p}, \dots, k_{i_n}\}$  będzie ustawieniem niejednokolorowym, tj.

$$\exists p, q \in \{1, 2, \dots, n\} : p \neq q \Rightarrow k_{i_p} \neq k_{i_q},$$

wtedy ustawienie to mogło być zbudowane z dwóch różnych ustawień  $n - 1$  elementowych:

$$\{k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_{n-1}}\} \cup \{k_{i_p}\},$$

$$\{k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_p}, \dots, k_{i_{n-1}}\} \cup \{k_{i_x}\},$$

$$\text{gdzie } \{k_{i_x}\} = \{k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_p}, \dots, k_{i_n}\} \setminus \{k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_p}, \dots, k_{i_{n-1}}\},$$

Zatem ostateczna postać równania poszukiwanego rekurencyjnego

to

$$\begin{aligned}h_{n,r} &= \frac{r \cdot h_{n-1,r} + r}{2} \\ &= \frac{r}{2} \cdot (h_{n-1,r} + 1).\end{aligned}$$

Pozostaje nam jeszcze określenie wartości brzegowej (początkowej) dla  $n = 0$ . Ustalamy, że  $h_{0,r} = 1$  ( $h_{0,r} = 0$  nie gwarantuje poprawności równania rekurencyjnego),

- wyznaczenie postaci zwartej dla  $h_{n,r}$  - postępujemy zgodnie z zaprezentowanym powyżej schematem konstrukcji funkcji tworzącej:
  - określamy ogólne równanie rekurencyjne liczby  $h_{n,r}$  wiążące wszystkie wartości naturalne zmiennej indeksującej  $n$ , czyli

$$h_{n,r} = \frac{r}{2} \cdot h_{n-1,r} + \frac{r}{2} - [n = 0] \cdot \left(\frac{r}{2} - 1\right),$$

- o mnożymy obie strony równania przez  $z^n$  ( $z$  - współczynnik pomocniczy) i sumujemy po wszystkich  $n$ , czyli

$$\begin{aligned}
 h_{n,r} \cdot z^n &= \frac{r}{2} \cdot h_{n-1,r} \cdot z^n + \frac{r}{2} \cdot z^n - [n=0] \cdot \left(\frac{r}{2} - 1\right) \cdot z^n \\
 \sum_n h_{n,r} \cdot z^n &= \frac{r}{2} \cdot \sum_n h_{n-1,r} \cdot z^n + \frac{r}{2} \cdot \sum_n z^n - \left(\frac{r}{2} - 1\right) \cdot \sum_n [n=0] \cdot z^n \\
 \sum_n h_{n,r} \cdot z^n &= \frac{r}{2} \cdot \sum_n h_{n,r} \cdot z^{n+1} + \frac{r}{2} \cdot \sum_n z^n - \left(\frac{r}{2} - 1\right) \\
 \sum_n h_{n,r} \cdot z^n &= \frac{r}{2} \cdot \sum_n h_{n,r} \cdot z^{n+1} + \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{1-z} - \left(\frac{r}{2} - 1\right).
 \end{aligned}$$

Dla  $\sum_n h_{n,r} \cdot z^n$  wprowadzamy oznaczenie  $H(z)$  i przepisujemy równanie rekurencyjne używając nowego symbolu,

$$H(z) = \frac{r}{2} \cdot H(z) \cdot z + \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{1-z} - \left(\frac{r}{2} - 1\right),$$

- o rozwiązujemy równanie (szukamy zwartej postaci) względem

$H(z)$ , czyli

$$H(z) = \frac{r \cdot z - 2 \cdot z + 2}{(2 - 2 \cdot z) \cdot \left(1 - \frac{rz}{2}\right)},$$

- o niech  $\rho_1, \rho_2$  będą odwrotnościami rozwiązaniami równania  $(2 - 2 \cdot z) \cdot \left(1 - \frac{rz}{2}\right) = 0$ ,  $P(z) = r \cdot z - 2 \cdot z + 2$  oraz  $Q(z) = (2 - 2 \cdot z) \cdot \left(1 - \frac{rz}{2}\right)$ . Jeżeli  $\rho_1 \neq \rho_2$  i stopień wielomianu  $P(z)$  jest mniejszy od stopnia wielomianu  $Q(z)$  to postać zwarta dla liczby możliwych wież wysokości  $n$  wyraża się równaniem

$$h_{n,r} = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot \rho_i^n, \text{ gdzie } a_i = \frac{-\rho_i \cdot P\left(\frac{1}{\rho_i}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_i}\right)}.$$

Zatem:

$$(2 - 2 \cdot z) \cdot \left(1 - \frac{r \cdot z}{2}\right) = 0 \Rightarrow \rho_1 = 1 \wedge \rho_2 = \frac{r}{2} \wedge r \geq 3,$$

więc

$$\begin{aligned}
 h_{n,r} &= a_1 \cdot \rho_1^n + a_2 \cdot \rho_2^n \\
 &= \frac{-\rho_1 \cdot P\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_2}\right)} \cdot \rho_1^n + \frac{-\rho_2 \cdot P\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_2}\right)} \cdot \rho_2^n, \\
 &= \frac{(-1) \cdot r}{Q'\left(\frac{1}{\rho_1}\right)} \cdot \rho_1^n + \frac{\left(-\frac{r}{2}\right) \cdot \left(4 - \frac{4}{r}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\rho_2}\right)} \cdot \rho_2^n
 \end{aligned}$$

gdzie  $Q'(z) = 2 \cdot r \cdot z - r - 2$ , czyli

$$\begin{aligned}
 h_{n,r} &= \frac{(-r) \cdot \rho_1^n}{r - 2} + \frac{(-2 \cdot r + 2) \cdot \rho_2^n}{-r + 2} \\
 &= \frac{(-r) \cdot 1^n}{r - 2} + \frac{(-2 \cdot r + 2) \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^n}{-r + 2} \\
 &= \frac{2 \cdot r - 2}{r - 2} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^n - \frac{r}{r - 2}
 \end{aligned}$$

- dla  $n = 17$  i  $r = 7$  istnieje dokładnie

$$h_{n,r} = \frac{12}{5} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)^{17} - \frac{7}{5} = 4259591930 \approx 4,260 \cdot 10^9$$

różnych możliwości umieszczenia  $n = 17$  kul o  $r = 7$  rozróżnialnych kolorach w pudełku pojemności  $n = 17$ .



## Permutacje, kombinacje - przypomnienie:

- permutacją bez powtórzeń nazywamy  $n$ -elementowy ciąg elementów zbioru  $n$ -elementowego, liczba permutacji bez powtórzeń wynosi

$$n!,$$

- permutacją z powtórzeniami nazywamy  $n$ -elementowy ciąg elementów zbioru  $k$ -elementowego  $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ , liczba permutacji z powtórzeniami wynosi

$$\frac{n!}{\langle n_1 \rangle! \cdot \langle n_2 \rangle! \cdot \dots \cdot \langle n_k \rangle!},$$

gdzie symbol  $\langle n_i \rangle$  oznacza liczbę wystąpień znaku  $n_i$  w ciągu  $n$ -elementowym,

- kombinacją bez powtórzeń nazywamy  $k$ -elementowy podzbiór zbioru  $n$ -elementowego, liczba kombinacji bez powtórzeń wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!},$$

- kombinacją z powtórzeniami nazywamy  $k$ -elementowy multipodzbiór zbioru  $n$ -elementowego, liczba kombinacji z powtórzeniami wynosi

$$\binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k! \cdot (n - 1)!},$$

### Zadanie 6:

- na ile sposobów można utworzyć słowo  $\alpha$  składające się z dziesięciu znaków, jeżeli do dyspozycji mamy po cztery litery  $a, b, c$  oraz  $d$ ?

Rozwiązanie:

- niech  $z_i$  oznacza wybór  $z_i$  znaków typu  $i$  spośród liter  $a, b, c$  oraz  $d$ . Zastanówmy się ile różnych schematów  $s_j \mapsto (z_1, z_2, z_3, z_4)$  wyboru 10-ciu znaków ze zbioru  $\{a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, c, d, d, d, d\}$  może zaistnieć? Oczywiście są to:

$$s_1 \mapsto (4, 4, 2, 0)$$

$$s_2 \mapsto (4, 4, 1, 1)$$

$$s_3 \mapsto (4, 3, 3, 0)$$

$$s_4 \mapsto (4, 3, 2, 1)$$

$$s_5 \mapsto (4, 2, 2, 2)$$

$$s_6 \mapsto (3, 3, 3, 1)$$

$$s_7 \mapsto (3, 3, 2, 2)$$

- teraz każdy schemat  $s_j$  traktujemy jako permutację z powtórzeniami i obliczamy liczbę takich permutacji  $p(s_j)$ :

$$p(s_1) \longmapsto \frac{4!}{2! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 1!} = 12,$$

$$p(s_2) \longmapsto \frac{4!}{2! \cdot 0! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0!} = 6,$$

$$p(s_3) \longmapsto \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 1!} = 12,$$

$$p(s_4) \longmapsto \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 0!} = 24,$$

$$p(s_5) \longmapsto \frac{4!}{1! \cdot 0! \cdot 3! \cdot 0! \cdot 0!} = 4,$$

$$p(s_6) \longmapsto \frac{4!}{0! \cdot 3! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0!} = 4,$$

$$p(s_7) \longmapsto \frac{4!}{0! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 0! \cdot 0!} = 6,$$

- na bazie każdej permutacji z powtórzeniami schematu podstawowego  $s_j \mapsto (z_1, z_2, z_3, z_4)$  (reprezentuje ona 10 znaków) budujemy permutacje z powtórzeniami odpowiadające słowu  $\alpha$ , liczba takich słów wynosi

$$\frac{10!}{\langle z_1 \rangle! \cdot \langle z_2 \rangle! \cdot \langle z_3 \rangle! \cdot \langle z_4 \rangle!}.$$

Zatem dla wszystkich permutacji z powtórzeniami schematu  $s_j$  liczba słów  $\alpha(s_j)$  wynosi

$$\alpha(s_j) = p(s_j) \cdot \frac{10!}{\langle z_1 \rangle! \cdot \langle z_2 \rangle! \cdot \langle z_3 \rangle! \cdot \langle z_4 \rangle!}.$$

Dalej obliczamy:

$$\alpha(s_1) = 12 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 0!} = 37800$$

$$\alpha(s_2) = 6 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 1!} = 37800$$

$$\alpha(s_3) = 12 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 0!} = 50400$$

$$\alpha(s_4) = 24 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 302400$$

$$\alpha(s_5) = 4 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 75600$$

$$\alpha(s_6) = 4 \cdot \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1!} = 67200$$

$$\alpha(s_7) = 6 \cdot \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200,$$

Ostatecznie 10-znakowe słowo  $\alpha$  na zbiorze znaków

$$\{a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, c, d, d, d, d\}$$

może zostać utworzone na

$$\sum_{i=1}^7 \alpha(s_i) = 722400$$

różne sposoby.



### Zadanie 7:

- na ile sposobów można rozmieścić  $k$  identycznych jabłek,  $l$  różnych gruszek  $\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$  w  $n$  różnych skrzynkach  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  pojemności  $k + l$ ?

### Rozwiązanie:

- rozmieszczanie owoców możemy podzielić na dwa etapy: rozmieszczenie  $k$  identycznych jabłek oraz rozmieszczenie  $l$  różnych gruszek,
- rozmieszczenie  $k$  jabłek w  $n$  skrzynkach (niekoniecznie różnych) to kombinacja z powtórzeniami, liczba takich kombinacji to

$$\binom{n + k - 1}{k},$$

- rozmieszczenie  $l$  gruszek w  $n$  skrzyniach to złączenie:
  - kombinacji z powtórzeniami (oznaczymy ją przez  $\beta_i(l, n)$ ), odpowiadającej za wybór  $n$  skrzynek (niekoniecznie różnych), do

których trafią gruszki, liczba takich kombinacji to

$$\binom{n+l-1}{l},$$

- permutacji z powtórzeniami (oznaczymy ją przez  $\gamma(\beta_i(l, n))$ ), odpowiadającej za rozróżnienie wybranych skrzynek względem gruszek, liczba takich permutacji dla kombinacji  $\beta_i(l, n)$  to

$$p(\gamma(\beta_i(l, n))) = \frac{l!}{\langle s_1 \rangle! \cdot \langle s_2 \rangle! \cdot \dots \cdot \langle s_n \rangle!},$$

gdzie  $\langle s_j \rangle$  oznacza liczbę wystąpień symbolu skrzynki  $s_j$  w kombinacji  $\beta_i(l, n)$ ,

- ostatecznie  $k$  identycznych jabłek i  $l$  różnych gruszek można roz-

mieścić w  $n$  różnych skrzynkach na

$$\binom{n+k-1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{\binom{n+l-1}{l}} p(\gamma(\beta_i(l, n)))$$

sposobów.



## Zadanie 8:

- pewien człowiek ma siedmiu przyjaciół oznaczonych symbolami 1, 2, 3, 4, 5, 6 oraz 7. Na ile sposobów może on zapraszać na obiad różnych trzech spośród nich przez siedem kolejnych dni, jeżeli wymagamy aby żadna para przyjaciół nie była razem na więcej niż jednym obiedzie?

Rozwiązanie:

- obiad I: trójka zaproszonych przyjaciół to kombinacja bez powtórzeń 3 elementów ze zbioru 7-elementowego, liczba takich kombinacji to

$$\binom{7}{3},$$

np. zakładamy, że zaproszono przyjaciół 1, 2 i 3,

- obiad II: trójka zaproszonych przyjaciół to kombinacja bez powtórzeń 3 elementów ze zbioru 7-elementowego bez trójek zawierających dowolną parę zaproszoną na obiad I, liczba takich kombinacji to

$$\binom{7}{3} - \delta,$$

gdzie  $\delta = 13$ , np. na obiad I przyszła trójka 1, 2, 3, wtedy żadna z trójek:

$$1, 2, \{4, 5, 6, 7\}$$

$$1, 3, \{4, 5, 6, 7\}$$

$$2, 3, \{4, 5, 6, 7\}$$

nie może przyjść na obiad I. Dalej są dwie możliwości: zapraszamy trójkę przyjaciół nie zaproszonych na obiad I, np. 4, 5, 6, albo jednego przyjaciela zaproszonego na obiad I i dwóch przyjaciół nie zaproszonych na obiad I, np. 3, 4, 5,

- obiad III: trójka zaproszonych przyjaciół to kombinacja bez powtórzeń 3 elementów ze zbioru 7-elementowego bez trójek zawierających dowolną parę zaproszoną na obiad I albo II, liczba takich kombinacji to

$$\binom{7}{3} - \delta - (\epsilon_1 \vee \epsilon_1),$$

gdzie  $\epsilon_1 = 13$  (np. dla 4, 5, 6) a  $\epsilon_2 = 13$  (np. dla 3, 4, 5), np. jeżeli:

- o na obiad II przyszła trójka 4, 5, 6, wtedy żadna z trójek:

4, 5, {1, 2, 3, 7}

4, 6, {1, 2, 3, 7}

5, 6, {1, 2, 3, 7}

nie może przyjść na obiad III. Dalej jest jedna możliwość: zapraszamy jednego przyjaciela już zaproszonego na obiad I, jednego przyjaciela już zaproszonego na obiad II oraz przyjaciela jeszcze nie zaproszonego na obiad, np. 1, 4, 7,

- o na obiad II przyszła trójka 3, 4, 5, wtedy żadna z trójek:

3, 4, {6, 7}

3, 5, {6, 7}

4, 5, {1, 2, 6, 7}

nie może przyjść na obiad III. Dalej są trzy możliwości: zapraszamy jednego przyjaciela zaproszonego na obiad I albo II i dwóch przyjaciół jeszcze nie zaproszonych na obiad, np. 1, 6, 7, zapraszamy jednego przyjaciela zaproszonego na obiad I i II oraz dwóch przyjaciół jeszcze nie zaproszonych na obiad, np. 3, 6, 7, albo przyjaciela zaproszonego na obiad I (ale nie na obiad II) i przyjaciela zaproszonego na obiad II (ale nie na obiad I) oraz przyjaciela jeszcze nie zaproszonego na obiad np. 2, 4, 6,

- obiad IV: trójka zaproszonych przyjaciół to kombinacja bez powtórzeń 3 elementów ze zbioru 7-elementowego bez trójek zawierających dowolną parę zaproszoną na obiad I II albo III, liczba takich kombinacji to

$$\binom{7}{3} - \delta - (\epsilon_1 \vee \epsilon_1) - (\zeta_1 \vee \zeta_2 \vee \zeta_3 \vee \zeta_4),$$

gdzie  $\zeta_1 = 5$  (np. dla 1, 4, 7),  $\zeta_2 = 9$  (np. dla 1, 6, 7),  $\zeta_3 = 5$  (np. dla 3, 6, 7) a  $\zeta_4 = 6$  (np. dla 2, 4, 6) np. jeżeli:

- o na obiad III przyszła trójka 1, 4, 7, wtedy żadna z trójek:

1, 4,  $\emptyset$   
1, 7, {5, 6}  
4, 7, {2, 3}

nie może przyjść na obiad IV. Dalej pozostały jeszcze cztery możliwe trójki

2, 5, 7   2, 6, 7   3, 5, 7   3, 6, 7

ale jest to zbyt mało aby zapełnić w sposób poprawny cztery ostatnie obiady,

- o na obiad III przyszła trójka 1, 6, 7, wtedy żadna z trójek:

1, 6, {4, 5}  
1, 7, {4, 5}  
6, 7, {2, 3, 4, 5}

nie może przyjść na obiad IV. Dalej pozostały jeszcze cztery możliwe trójki

2, 4, 6   2, 4, 7   2, 5, 6   2, 5, 7

ale jest to zbyt mało aby zapełnić w sposób poprawny cztery ostatnie obiady,

- o na obiad III przyszła trójka 3, 6, 7, wtedy żadna z trójek:

3, 6,  $\emptyset$

3, 7,  $\emptyset$

6, 7, {1, 2, 4, 5}

nie może przyjść na obiad IV. Dalej pozostało jeszcze osiem możliwych trójek

1, 4, 6   1, 4, 7   1, 5, 6   1, 5, 7  
2, 4, 6   2, 4, 7   2, 5, 6   2, 5, 7,

- o na obiad III przyszła trójka 2, 4, 6, wtedy żadna z trójek:

2, 4, {7}  
2, 6, {5, 7}  
4, 6, {1, 7}

nie może przyjść na obiad IV. Dalej pozostało jeszcze siedem możliwych trójek

1, 4, 7   1, 5, 6   1, 5, 7   1, 6, 7  
2, 5, 7   3, 6, 7   5, 6, 7,

- obiady IV-VII: pozostały dwa układy składające się odpowiednio z ośmiu i siedmiu trójek, które mogą poprawnie zapełnić cztery ostatnie obiady na  $8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$  oraz  $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$  sposobów.  
Np.:

- o dla układu

1, 4, 6   1, 4, 7   1, 5, 6   1, 5, 7  
2, 4, 6   2, 4, 7   2, 5, 6   2, 5, 7,

wybieramy kolejno dowolną trójkę (np. 1, 4, 6), pozostają jeszcze trójki

1, 5, 7   2, 4, 7   2, 5, 6   2, 5, 7,

następni wybieramy dowolną trójkę różną od trójki 2, 5, 7 (np. 2, 4, 7), pozostają jeszcze trójki

1, 5, 7   2, 5, 6,

które pozwalają nam zapełnić dwa ostatnie obiady,

o dla układu

1, 4, 7   1, 5, 6   1, 5, 7   1, 6, 7  
2, 5, 7   3, 6, 7   5, 6, 7,

wybieramy jedną z trzech trójek

1, 4, 7   1, 5, 6   2, 5, 7

(np. 1, 4, 7), pozostają jeszcze trójki

1, 5, 6   2, 5, 7   3, 6, 7   5, 6, 7,

następni wybieramy dowolną trójkę różną od trójki 5, 6, 7 (np. 1, 5, 6), pozostają jeszcze trójki

1, 5, 7   3, 6, 7

które pozwalają nam zapełnić dwa ostatnie obiady,

- ostatecznie odpowiedzią jest

$$\begin{aligned} & \binom{7}{3} \cdot \left( \binom{7}{3} - 13 \right) \cdot \left( \binom{7}{3} - 13 - 9 \right) \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + \\ & \binom{7}{3} \cdot \left( \binom{7}{3} - 13 \right) \cdot \left( \binom{7}{3} - 13 - 9 \right) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ & \qquad \qquad \qquad 180180 + 480480 = 660660. \end{aligned}$$